



Un Test de type Kolmogorov-smirnov pour processus de diffusion ergodiques

Eric Fournie

► To cite this version:

Eric Fournie. Un Test de type Kolmogorov-smirnov pour processus de diffusion ergodiques. [Rapport de recherche] RR-1696, INRIA. 1992. inria-00076932

HAL Id: inria-00076932

<https://inria.hal.science/inria-00076932>

Submitted on 29 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Sophia Antipolis
B.P. 109
06561 Valbonne Cedex
France
Tél.: 93 65 77 77

Rapports de Recherche

N°1696

Programme 6
Calcul scientifique, Modélisation
et Logiciel numérique

**UN TEST DE TYPE
KOLMOGOROV-SMIRNOV POUR
PROCESSUS DE DIFFUSION
ERGODIQUES**

Eric FOURNIE

Mai 1992

UN TEST DE TYPE KOLMOGOROV-SMIRNOV POUR PROCESSUS DE DIFFUSION ERGODIQUES

A test of type Kolmogorov-Smirnov
for ergodic diffusion processes

Eric FOURNIE

INRIA
2004, Route des Lucioles
Sophia Antipolis
F-06565 Valbonne (France)

Abstract

We present a test of Kolmogorov-Smirnov type for ergodic diffusion processes. It is based on an estimate of large deviations probabilities for the supremum of the limit process of the empirical process. We extend the results to the case when some parameters in the drift are estimated during the same observation. We give an asymptotic speed for the rejection of the model when the drift is miss-specified. We give complete examples and we show the behaviour of the test on numerical simulations.

keywords : *empirical process, supremum of a Gaussian process, two-sided test, parametrical estimation, goodness of fit test, miss-specified drift, asymptotic rejection speed.*

Résumé

Nous présentons un test de type Kolmogorov-Smirnov pour des processus de diffusion ergodiques. Ce test utilise une estimation des probabilités de grandes déviations du processus limite du processus empirique. Nous étendons les résultats au cas où des paramètres de la dérive sont estimés lors de la même observation. Nous donnons une vitesse asymptotique de rejet du modèle lorsque la dérive n'est pas de la forme paramétrique supposée. Nous donnons des exemples complets et nous montrons le comportement du test sur des simulations numériques.

Mots clés : *processus empirique, suprénum d'un processus gaussien, test bi-latéral, estimation paramétrique, test d'adéquation de modèle, dérive mal spécifiée, vitesse asymptotique de rejet du modèle.*

1 Introduction

Motivés par l'étude de certains outils stochastiques en mathématiques financières, notamment le modèle d'évolution des taux d'intérêt de J.C.Cox, J.E.Ingersoll et S.A.Ross [5]¹, nous nous sommes proposés de développer un test d'adéquation de modèle pour des processus de diffusion homogènes ergodiques.

Les seuls tests que nous connaissons se rapprochant des tests d'adéquation dans ce contexte sont les tests du rapport de vraisemblance généralisé (voir par exemple, le test du χ^2 proposé par B.M.Brown et J.I.Hewitt [4]) qui permet de tester si la dérive d'une certaine équation différentielle stochastique, vérifiée par un processus de diffusion stationnaire, appartient à une certaine sous-famille d'une famille de fonctions donnée à priori, et le test proposé par I.W.McKeague dans [17], qui permet de décider entre deux familles paramétriques données comme modèle de dérive, laquelle est la plus adéquate à la diffusion stationnaire observée.

Nous nous sommes proposés dans ce travail d'étendre le test de Kolmogorov-Smirnov au cas des diffusions homogènes ergodiques réelles.

Le test de Kolmogorov-Smirnov, pour des échantillons à valeurs dans $[0, 1]$, repose sur la connaissance de la loi limite, lorsque $T \rightarrow \infty$ du maximum du processus empirique $(Z_T(x) = \sqrt{T}(F_T(x) - F(x)), x \in [0, 1])$ différence normalisée entre les fonctions de répartition empirique $F_T(x)$ et théorique $F(x)$, considéré comme un processus indicé par la variable $x \in [0, 1]$. Le théorème de Kolmogorov montre que, dans le cas des échantillons, ce processus empirique converge en loi dans $D[0, 1]$ vers un pont brownien, et l'on sait alors calculer la loi de son maximum. Dans le cas des diffusions, le processus empirique Z_T converge en loi vers un processus gaussien moins particulier que le pont brownien, et nous sommes actuellement incapable d'obtenir la loi de son suprémum. Cependant, Donsker et Varadhan dans [7] donne, sous des conditions assez générales, un théorème de grandes déviations pour les processus gaussiens à trajectoires presque sûrement continues. Ceci nous a permis de mettre en place un test.

Nous avons ensuite étendu les résultats au cas où les paramètres sont estimés lors de la même observation. Nous obtenons la loi du processus empirique limite moyennant des hypothèses assez larges sur la représentation des estimateurs.

Nous présentons des exemples complets accompagnés de nombreux essais numériques. Nous renvoyons à D.Talay [18] pour l'aspect simulation numérique des processus de diffusion.

¹Cet article fait suite à une étude détaillée du modèle de Cox, Ingersoll et Ross, par E.Fournié et D.Talay, [10]. Nous y présentons sous forme didactique des résultats portant sur l'estimation des paramètres de ce modèle par les méthodes classiques : maximum de vraisemblance, méthode des moments. Nous montrons le comportement de ces estimateurs sur des simulations, ainsi que sur des données réelles issues du marché monétaire français. Nous présentons aussi les résultats obtenus en mettant en oeuvre des estimateurs non-paramétriques.

2 Test de Kolmogorov pour des diffusions récurrentes positives sur \mathbb{R}

2.1 Le théorème fondamental

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration de \mathcal{F} . Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de diffusion (\mathcal{F}_t) -adapté à valeurs dans \mathbb{R} , homogène en temps, unique solution sous P de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

où $b(x)$ est une fonction borélienne, bornée sur tout compact de \mathbb{R} , $\sigma^2(x)$ est une fonction continue, strictement positive, et $(W_t)_{t \geq 0}$ un processus de Wiener standard sur \mathbb{R} , (\mathcal{F}_t) -adapté.

Posons $s(x) = \exp(-\int_0^x \frac{2b(z)}{\sigma^2(z)} dz)$, et $S(x) = \int_0^x s(z) dz$. Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} S(x) = \pm\infty$, la diffusion est récurrente (condition nécessaire et suffisante, voir R.Z.Has'minskii [11]). de mesure invariante (σ -finie, mais non nécessairement finie) de densité $\frac{1}{\sigma^2(\cdot)s(\cdot)}$. Nous supposons dans la suite que la diffusion est récurrente positive, i.e. $\int \frac{1}{\sigma^2(x)s(x)} dx < \infty$. Elle admet donc une unique mesure invariante de probabilité que nous notons μ . Elle est alors ergodique au sens :

$$\forall f \in L^1(\mu), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X_s) ds = \int f d\mu, \quad P - p.s.$$

En vue de simplifier les notations, nous nous plaçons dans l'espace canonique. Soit $C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de \mathbb{R}^+ continues, que l'on munit de sa tribu borélienne $\mathcal{B} = \sigma(\pi_s, s \geq 0)$ engendrée par les fonctions coordonnées $\pi_s, s \geq 0$. Soit Q_ν la loi induite par le processus (X_t) lorsque la loi initiale est ν sur $(C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}), \mathcal{B})$ par les fonctions coordonnées $\pi_t(X_s, s \geq 0) = X_t$, et notons ${}_T Q_\nu$ sa restriction à $(C([0, T]; \mathbb{R}), \mathcal{B}_T)$, où \mathcal{B}_T est la trace de \mathcal{B} sur $C([0, T]; \mathbb{R})$. On note \mathbf{E}_ν l'espérance sous Q_ν , et par abus d'écriture, Q_{x_0} et \mathbf{E}_{x_0} désignent la loi du processus et l'espérance calculée sous cette loi lorsque la loi initiale est concentrée en x_0 .

Soit $\chi_{[0, x]}$ l'indicatrice de $[0, x]$ et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction borélienne telle que la fonction $x \rightarrow \int \chi_{[0, x]} \circ f d\mu$ soit continue sur $[0, 1]$. Posons $\tilde{f}_x = \chi_{[0, x]} \circ f - \int \chi_{[0, x]} \circ f d\mu$ où $\chi_{[0, x]}$, $F_T(x) = T^{-1} \int_0^T \chi_{[0, x]} \circ f(\pi_s) ds$ et $F(x) = \int \chi_{[0, x]} \circ f d\mu$, et définissons, pour T fixé, le processus empirique normalisé $(Z_T(x), 0 \leq x \leq 1)$, à valeurs dans $D[0, 1]$, espace des fonctions càd-làg sur $[0, 1]$, par :

$$Z_T(x) = \sqrt{T} (F_T(x) - F(x)) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \tilde{f}_x(\pi_t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Le théorème suivant prouve la convergence en loi dans $D[0, 1]$, sous Q_ν , lorsque $T \rightarrow \infty$, du processus empirique Z_T vers un processus gaussien continu Z .

Théorème 2.1 *Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 > x_1$ et définissons la suite $\{\eta_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ de temps d'arrêt de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}\eta_0 &= \inf \{t \geq 0 : \pi_t = x_0\}, \\ \eta_{2i+1} &= \inf \{t > \eta_{2i} : \pi_t = x_1\}, \\ \eta_{2i+2} &= \inf \{t > \eta_{2i+1} : \pi_t = x_0\}, i = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Supposons $\mathbf{E}_{x_0}(\eta_2 - \eta_0)^2 = \mathbf{E}_{x_0}\eta_2^2 < \infty$. Supposons d'autre part que, $\forall x \in [0, 1]$, l'équation de Poisson $\mathcal{L}G_x = -\tilde{f}_x$ admette une solution G_x vérifiant $\mu(\sigma^2 \dot{G}_x^2) < \infty$. Alors quelle que soit la loi initiale ν , on a sous $Q_\nu : Z_T \Rightarrow Z$ dans $D[0, 1]$, où Z est un processus gaussien de moyenne nulle et de covariance $c(x, y)$ donnée par :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad c(x, y) = \int 4\sigma^2(u)s^2(u) \int_{-\infty}^u \frac{\tilde{f}_x(v)}{(\sigma^2 s)(v)} dv \int_{-\infty}^u \frac{\tilde{f}_y(v)}{(\sigma^2 s)(v)} dv \, d\mu(u)$$

De plus, $Q_\nu(Z \in C[0, 1]) = 1$, où $C[0, 1]$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$.

Bhattacharya dans [2] montre la convergence faible de Z_T vers un processus gaussien Z continu dans le cas général des diffusions récurrentes positives sur \mathbb{R}^k ². Cependant, il n'obtient pas d'expression calculable de la covariance du processus limite.

Dans le cas des diffusions unidimensionnelles, on peut obtenir une telle expression. Ce résultat repose sur la résolution explicite de l'équation de Poisson.

On note $L_0^1(\mu)$ l'espace des fonctions de $L^1(\mu)$, d'intégrale nulle par rapport à la mesure μ .

Théorème 2.2 *Soit $f \in L_0^1(\mu)$. Supposons que l'équation de Poisson $\mathcal{L}G = -f$ admette une solution G vérifiant $\mu(\sigma^2 \dot{G}^2) < \infty$. Alors, quelle que soit la loi initiale ν , on a sous Q_ν :*

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(\pi_t) dt \Rightarrow \mathcal{N}(0, V_0(f)),$$

$$\text{où } V_0(f) = \int 4\sigma^2(u)s^2(u) \left(\int_{-\infty}^u \frac{f(v)}{(\sigma^2 s)(v)} dv \right)^2 \mu(du).$$

²On peut rappeler les grandes lignes de la démonstration, dans le cas particulier de la dimension 1. On remarque tout d'abord que sous Q_ν , $\forall x \in [0, 1]$, les variables $\tilde{\varepsilon}_i(x) = \int_{\eta_{2i}}^{\eta_{2i+2}} \tilde{f}_x(\pi_s) ds$, $i = 0, 1, 2, \dots$ forment une suite de variable indépendantes, identiquement distribuées (propriété de Markov forte), centrées et de variance finie grâce à l'hypothèse $\mathbf{E}_{x_0}(\eta_2 - \eta_0)^2 < \infty$. On prouve alors grâce à des arguments classiques, un théorème de limite centrale pour $Z_T(x)$, x fixé. Ceci entraîne la convergence lorsque $T \rightarrow \infty$ des lois fini-dimensionnelles de Z_T vers les lois fini-dimensionnelles de Z . On termine la preuve en montrant la tension de la famille des lois de Z_T d'une manière analogue à celle du théorème 22.1 dans P.Billingsley [3].

D.Florens dans [8] obtient ce résultat pour les processus stationnaires, c'est-à-dire sous la loi Q_μ , en considérant des fonctions f continues, d'intégrale nulle.

Rappelons d'abord le théorème suivant dû à Bhattacharya [2], extension d'un résultat bien connu de Hasminskii. Notons $\|\nu\|$ la norme en variation des mesures de probabilité, $\|\nu\| = \sup\{|\nu(B)|, B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}\}$. ν_t désigne la mesure de probabilité, $\nu_t(B) = \int p(t, x, B) d\nu(x)$ où $p(t, x, dy)$ est la probabilité de transition du processus solution de (1).

Théorème 2.3 *Quelle que soit la loi initiale ν , $\|\nu_t - \mu\| \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow \infty$*

Preuve (du théorème 2.2) On a une formule explicite dans le cas des diffusions de la solution de l'équation de Poisson $\mathcal{L}G = -f$:

$$G(x) = -2 \int_0^x s(y) \int_{-\infty}^y \frac{f(z)}{(\sigma^2 s)(z)} dz dy$$

G est de classe C^1 , mais pas C^2 car f n'est pas supposée continue, et par conséquent, on ne peut pas lui appliquer la formule d'Ito traditionnelle. Cependant la formule de Ito-Tanaka nous permet d'obtenir la représentation nous permet d'obtenir la représentation suivante suivante.(voir par exemple, [12], th. 3.7.1, pb. 3.7.3).

$$G(\pi_t) = G(\pi_0) - \int_0^t f(\pi_s) ds + \int_0^t (\sigma \dot{G})(\pi_s) d\tilde{W}_s$$

où $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Wiener standard sous Q_ν . Posons :

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t (\sigma \dot{G})(\pi_s) d\tilde{W}_s \\ &= G(\pi_t) - G(\pi_0) + \int_0^t f(\pi_s) ds \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $V_0(f) < \infty$, M_t est une Q_ν -martingale de carré intégrable. En utilisant le théorème de limite centrale pour les martingales browniennes de Yu.A.Kutoyants dans [14], on obtient :

$$\frac{M_T}{\sqrt{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T (\sigma \dot{G})(\pi_t) d\tilde{W}_t \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_0(f))$$

Comme G est continue, le théorème 2.3 montre que sous Q_ν , $G(\pi_t) \Longrightarrow G(X)$ lorsque $t \rightarrow \infty$, où X est une variable aléatoire de loi μ . G étant ν -intégrable, on a sous la loi Q_ν :

$$\frac{1}{\sqrt{T}}(G(\pi_T) - G(\pi_0)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

On déduit alors facilement :

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(\pi_t) dt \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_0(f)),$$

ce qui termine la preuve. □

Preuve (du théorème 2.1) En utilisant le théorème précédent, un calcul direct permet d'obtenir l'expression de la covariance $c(x, y), 0 \leq x, y \leq 1$ du processus limite Z . En intégrant par parties, et en se servant, des expressions de $G(x)$ et de $d\mu(x)$, on obtient :

$$V_0(f) = \mu(\sigma^2 \dot{G}^2) = 2 \int G f d\mu.$$

L'inégalité de Schwartz montre que, sous les hypothèses du théorème 2.1, $\forall x, c(x, x) = 2 \int G_x \tilde{f}_x d\mu < \infty$. Ceci, associé au résultat de Bhattacharya, termine la preuve du théorème 2.1. \square

Exemple 2.4 Considérons le processus de diffusion $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = -\tanh(X_t) dt + dW_t, \quad t \geq 0$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard sur \mathbb{R} . On montre que ce processus est ergodique et qu'il vérifie les hypothèses du théorème 2.1. La densité de sa mesure invariante de probabilité est $p(x) = \frac{1}{2 \cosh^2(x)}$, et sa fonction de répartition est $F(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$. Si nous choisissons comme fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, la fonction de répartition F , $(F(X_t))$ est un processus ergodique, de loi invariante la loi uniforme sur $[0, 1]$. Un calcul direct montre que le processus gaussien limite Z est le pont brownien W^0 , $W^0(t) = W(t) - tW(1)$, $t \in [0, 1]$. La loi de $W^0(t)$ est $\mathcal{N}(0, t(1-t))$.

Nous avons effectué des essais numériques pour comparer les lois fini-dimensionnelles du processus empirique avec celles du pont Brownien. Nous avons procédé de la manière suivante :

- nous avons simulé des réalisations indépendantes du processus (X_t) , puis calculé $(F(X_t))$;
- pour chaque réalisation de $(F(X_t))$, nous avons calculé le processus empirique associé, pour diverses valeurs de $x \in [0, 1]$; nous avons donc obtenu un échantillon du processus empirique;
- nous avons ensuite calculé la fonction de répartition empirique du processus empirique, pour les valeurs de x choisies, à l'aide de cet échantillon.

La figure 1 représente en 3D, les fonctions de répartitions empiriques (en pointillé) et les fonctions de répartition théoriques du pont brownien. Les simulations ont été effectuées avec les paramètres suivants :

Schéma de discrétisation : Milshtein (ordre 2)

Nombre de trajectoires simulées : 100

Durée de la simulation : 500

Pas de discrétisation en temps : 0.01

Pas de discrétisation en x : 0.1

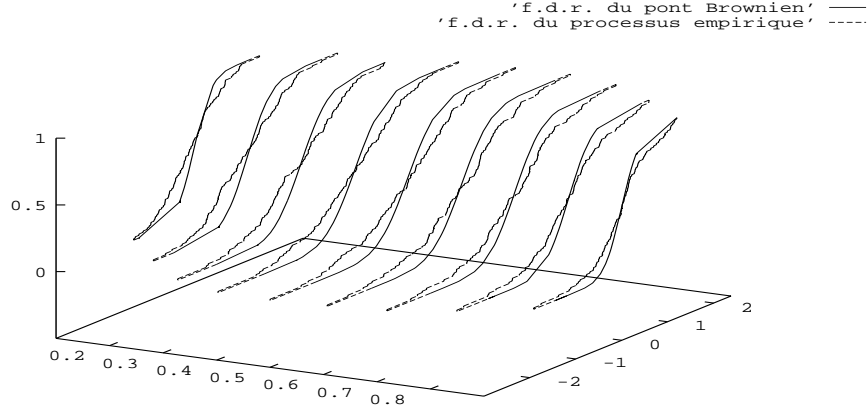


Figure 1: *Comparaison des f.d.r. des processus empirique et pont Brownien*

2.2 Un premier test

Le test de Kolmogorov repose sur la connaissance de la loi du maximum de la limite du processus empirique. Dans le cas des échantillons, le théorème de Kolmogorov-Smirnov montre que le processus empirique limite est un pont brownien, et la loi de son maximum est connue, mais nous venons de voir que dans le cas des processus de diffusion ergodiques sur \mathbb{R} , ce processus limite est un processus gaussien moins particulier, et nous ne pouvons pas actuellement déterminer la loi du suprémum d'un tel processus.

Cependant, le théorème de grande déviation suivant, pour le supremum en valeur absolue d'un processus gaussien à trajectoires presque sûrement continues, dû originellement à M.B.Marcus et L.A.Shepp dans [16], nous permettra de mettre en place un test ³.

Théorème 2.5 (*d'après Donsker-Varadhan [7]*) Soit $(Z(x), x \in [0, 1])$ un processus gaussien réel à trajectoires presque sûrement continues, de moyenne 0 et de covariance $c(x, y)$, $x, y \in [0, 1]$. Soit $\kappa^2 = \sup_{x \in [0, 1]} c(x, x)$, alors on a :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \log(P(\sup_{x \in [0, 1]} |Z(x)| > u)) = -\frac{1}{2\kappa^2}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (W_t)_{t \geq 0})$ un processus de Wiener standard sur \mathbb{R} . Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, considérons la famille de diffusions sur \mathbb{R} , homogènes en temps,

³Plus récemment, S.M.Berman dans [1] a obtenu un théorème de grande déviation plus précis pour le suprémum de certains processus gaussiens continus, incluant le cas des processus à multi-indices, mais nous ne pouvons pas exploiter ce résultat car notre processus gaussien est d'un type trop particulier.

$\mathcal{F}_\theta = \{(X_t^\theta)_{t \geq 0}\}$. On suppose que la diffusion $(X_t^\theta)_{t \geq 0}$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t^\theta = b_\theta(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

où $\forall \theta \in \Theta$, $b_\theta(x)$ est une fonction borélienne, bornée sur tout compact de \mathbb{R} et $\sigma^2(x)$ est une fonction continue, strictement positive.

On note \mathcal{L}^θ l'opérateur infinitésimal de la diffusion (X_t^θ) :

$$\mathcal{L}^\theta = b_\theta(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Posons $s_\theta(x) = \exp(-\int_0^x \frac{2b_\theta(z)}{\sigma^2(z)} dz)$, et $S_\theta(x) = \int_0^x s_\theta(z) dz$. Supposons $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} S_\theta(x) = \pm\infty$, alors la diffusion est récurrente de mesure invariante μ^θ de densité $\frac{1}{(\sigma^2(\cdot)s_\theta(\cdot))}$. Nous supposerons dans la suite ces diffusions récurrentes positives, i.e. $\int \frac{1}{\sigma^2(x)s_\theta(x)} dx < \infty$, $\forall \theta \in \Theta$.

En vue de simplifier les notations, nous nous plaçons à nouveau dans l'espace canonique. On note $Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$ la loi induite par le processus $(X_t^\theta)_{t \geq 0}$ de loi initiale ν sur $(C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}), \mathcal{B})$ par les fonctions coordonnées $(\pi_t, t \geq 0)$, et ${}_T Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$ sa restriction à $(C([0, T]; \mathbb{R}), \mathcal{B}_T)$, où \mathcal{B}_T est la trace de \mathcal{B} sur $C([0, T]; \mathbb{R})$. $\mathbf{E}_{\nu, \theta, \sigma}$ désigne l'espérance sous $Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$, et on note $Q_{\theta}^{x_0, \sigma}$ et $\mathbf{E}_{x_0, \theta, \sigma}$ la loi du processus et l'espérance calculée sous cette loi lorsque la mesure initiale est concentrée en x_0 .

Nous travaillons donc dans l'espace statistique \mathcal{E}_0 :

$$\mathcal{E}_0 = \{C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}), \mathcal{B}, (Q_{\theta}^{\nu, \sigma}, (\theta, \nu, \sigma^2) \in \Theta \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_*^+))\}$$

où $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des mesures de probabilités sur \mathbb{R} .

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction borélienne telle que, $\forall \theta \in \Theta$, la fonction $x \rightarrow F^\theta(x) = \int \chi_{[0, x]} \circ f d\mu^\theta$ soit continue sur $[0, 1]$. Posons $\tilde{f}_x^\theta = \chi_{[0, x]} \circ f - \int \chi_{[0, x]} \circ f d\mu^\theta$, $F_T(x) = T^{-1} \int_0^T \chi_{[0, x]} \circ f(\pi_s) ds$, et $F^\theta(x) = \int \chi_{[0, x]} \circ f d\mu^\theta$ et définissons, pour T fixé, le processus empirique normalisé $(Z_T^\theta(x), 0 \leq x \leq 1)$ par :

$$Z_T^\theta(x) = \sqrt{T}(F_T(x) - F^\theta(x)) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \tilde{f}_x^\theta(\pi_t) dt$$

Dans ce contexte, nous avons la proposition suivante.

Proposition 2.6 *Supposons vérifiées, pour tout $\theta \in \Theta$, les conditions du théorème 2.1. Alors $\forall \theta \in \Theta$, sous $Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$, $Z_T^\theta \Rightarrow Z^\theta$ dans $D[0, 1]$ où Z^θ est un processus gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance $c^\theta(x, y)$ donnée par :*

$$\forall x, y \in [0, 1], c^\theta(x, y) = \int 4\sigma^2(u)s_\theta^2(u) \int_{-\infty}^u \frac{\tilde{f}_x^\theta(v)}{(\sigma^2 s_\theta)(v)} dv \int_{-\infty}^u \frac{\tilde{f}_y^\theta(v)}{(\sigma^2 s_\theta)(v)} dv \mu^\theta(du)$$

De plus, $Q_{\theta}^{\nu,\sigma}(Z^{\theta} \in C[0,1]) = 1$. On a alors, $\forall \theta \in \Theta$:

$$\lim_{u,T \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \log(Q_{\theta}^{\nu,\sigma}(\sup_{x \in [0,1]} |Z_T^{\theta}(x)| > u)) = -\frac{1}{2\kappa_{\theta}^2}$$

où $\kappa_{\theta}^2 = \sup_{x \in [0,1]} c^{\theta}(x, x)$.

La proposition suivante permet de tester, à l'intérieur de \mathcal{E}_0 , l'hypothèse simple :

$$\begin{aligned} H_0 : \theta &= \theta_0, \\ \text{contre } H_1 : \theta &\neq \theta_0. \end{aligned}$$

Proposition 2.7 *Supposons vérifiées les conditions de la proposition 2.6, et faisons l'hypothèse supplémentaire d'identifiabilité des lois invariantes $\{\mu^{\theta}, \theta \in \Theta\}$:*

$$\forall \theta_0, \theta_1 \in \Theta, \theta_0 \neq \theta_1, \exists U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu^{\theta_0}(U) \neq \mu^{\theta_1}(U)$$

où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ désigne la tribu borélienne de \mathbb{R} .

On a alors, si f préserve l'identifiabilité (par exemple, si f est bijective), $\forall \theta \in \Theta, \theta \neq \theta_0$:

$$\sup_{x \in [0,1]} |Z_T^{\theta_0}(x)| \longrightarrow \infty, \quad Q_{\theta}^{\nu,\sigma} - p.s.$$

La preuve est immédiate.

Exemple 2.8 Considérons la famille $\mathcal{F}_{\theta} = \{(X_t^{\theta})_{t \geq 0}, \theta \in \Theta =]0, +\infty[\}$ de processus d'Ornstein-Uhlenbeck vérifiant les équations différentielles stochastiques

$$dX_t^{\theta} = -\theta X_t^{\theta} dt + dW_t$$

On sait que $\forall \theta > 0$, (X_t^{θ}) est récurrent positif, de mesure invariante $d\mu^{\theta} = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \exp(-\theta x^2) dx$.

On observe une diffusion $(X_t^{\theta})_{t \geq 0}$, et l'on veut tester l'hypothèse simple :

$$\begin{aligned} H_0 : \theta &= \theta_0, \\ \text{contre } H_1 : \theta &\neq \theta_0. \end{aligned}$$

Nous avons choisi comme fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, $f(x) = \exp(-x^2)$.

On vérifie facilement que les hypothèses de la proposition 2.6 et de la proposition 2.7 sont vérifiées $\forall \theta \in \Theta$. Par conséquent, le processus empirique $(Z_T^{\theta_0}(x), x \in [0,1])$, dans le cas où l'observation provient du processus $(X_t^{\theta_0})$, converge vers un processus $(Z^{\theta_0}(x), x \in [0,1])$ de covariance

$$c^{\theta_0}(x, y) = 4\sqrt{\frac{\theta_0}{\pi}} \int \exp(\theta_0 u^2) \tilde{g}_x^{\theta_0}(u) \tilde{g}_y^{\theta_0}(u) du, \quad x, y \in [0,1]$$

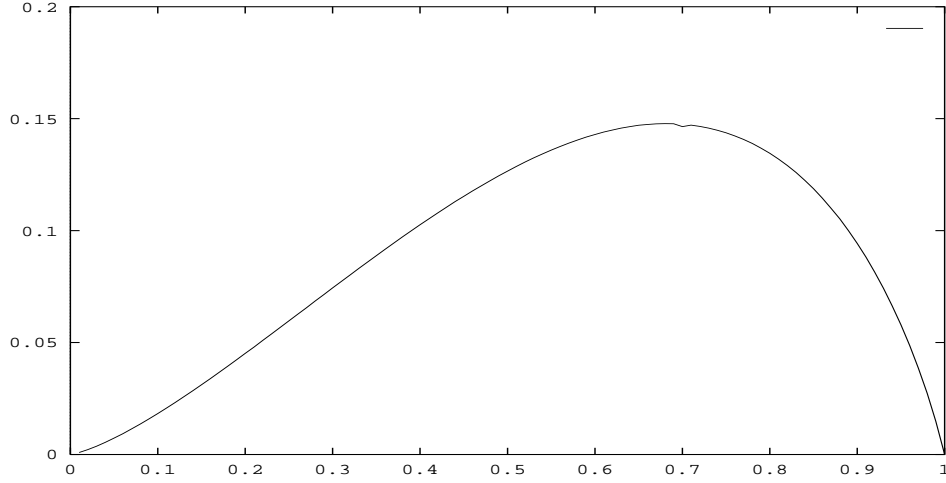


Figure 2: *Variance du processus* $(Z^{\theta_0}(x), x \in [0, 1])$

où l'on a posé $\tilde{g}_x^{\theta_0}(u) = \int_{-\infty}^u \tilde{f}_x^{\theta_0}(v) \exp(-\theta_0 v^2) dv$.

Si l'observation provient du processus $(X_t^{\theta_1})$, $\theta_1 \neq \theta_0$, le supremum sur $[0, 1]$ du processus empirique $(Z_T^{\theta_0}(x), x \in [0, 1])$, considéré comme processus en T , converge vers l'infini presque sûrement, lorsque $T \rightarrow \infty$.

Les essais numériques ci-dessous montrent le comportement du test. Les simulations ont été effectuées avec les paramètres suivants :

Schéma de discrétisation : Milshtein (ordre 2)

Zone de rejet : $R = [x \geq 3\kappa_{\theta_0}], Q_{\theta}^{\nu, \sigma}(\sup_{x \in [0, 1]} |Z^{\theta}(x)| \in R) \simeq 0.01$

Pas de discrétisation : $3.83.10^{-3}$

Durée de la simulation : 250

θ_0 : 1.0

θ_1 : Fig.3: 1.0; Fig.4: 0.5; Fig.5: 2.0; Fig.6: 5.0

On a déterminé numériquement le maximum $\kappa_{\theta_0}^2$ de la variance du processus $(Z^{\theta_0}(x), x \in [0, 1])$. La figure 2 montre l'allure de la variance de $(Z^{\theta_0}(x), x \in [0, 1])$.

La figure 3 montre que lorsque l'observation provient d'un processus $(X_t^{\theta_0})$, le processus $(\sup_{x \in [0, 1]} |Z_t^{\theta_0}(x)|)_{t \geq 0}$ n'atteint pas la zone de rejet $R = \{x \in R^+, x \geq 3\kappa_{\theta_0}\}$. Lorsque $t \rightarrow \infty$, la probabilité qu'il atteigne cette zone est de l'ordre de 0.01.

On voit sur les figures 4, 5 et 6 que le test rejette si l'observation provient d'un processus (X_t^{θ}) avec $\theta \neq \theta_0$.

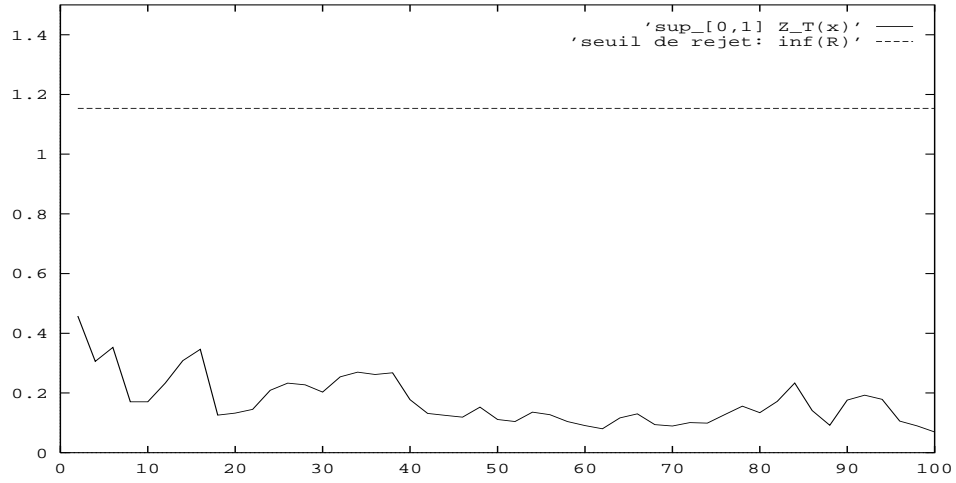


Figure 3: *Observation* : $(X_t^{\theta_1})$, $\theta_1 = \theta_0$

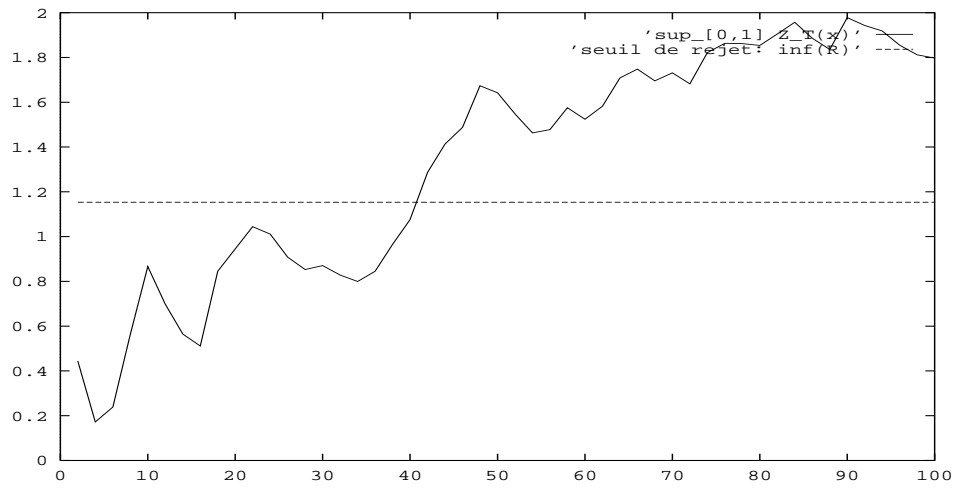


Figure 4: *Observation* : $(X_t^{\theta_1})$, $\theta_1 < \theta_0$

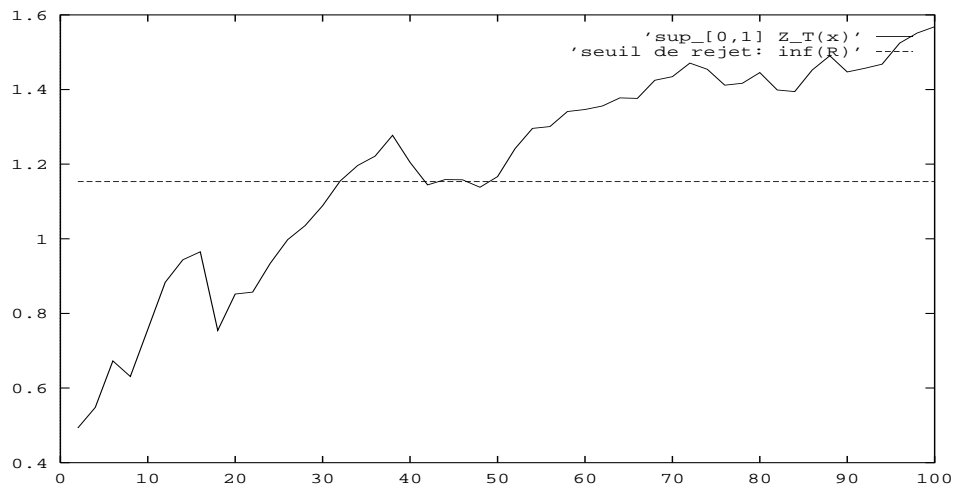


Figure 5: *Observation* : $(X_t^{\theta_1})$, $\theta_1 > \theta_0$

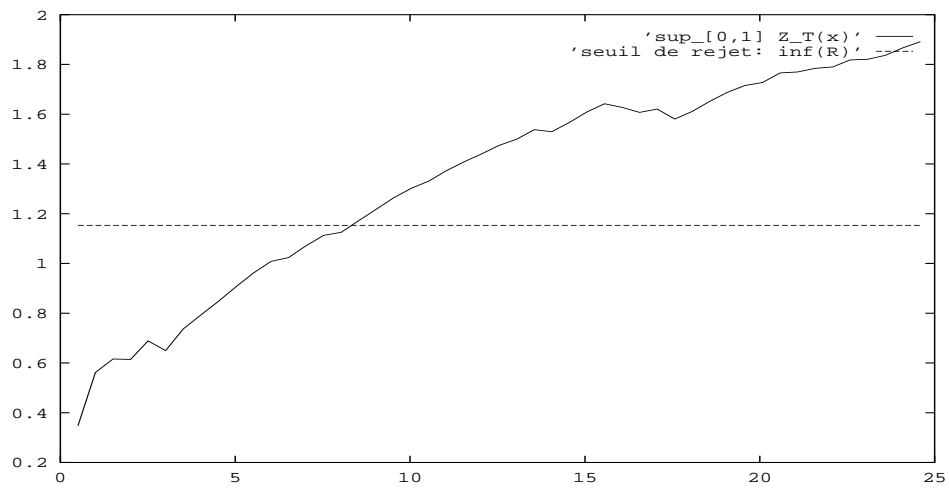


Figure 6: *Observation* : $(X_t^{\theta_1})$, $\theta_1 \gg \theta_0$

Comme on pouvait s'y attendre, le test rejette d'autant plus vite que θ est plus éloigné de θ_0 (comparer les figures 5 et 6).

3 Test de Kolmogorov pour des diffusions récurrentes positives sur \mathbb{R} dans le cas où les paramètres sont estimés

Considérons maintenant $\hat{\theta}_T$ un estimateur de θ consistant, c'est-à-dire tel que $\hat{\theta}_T \xrightarrow{P} \theta$ lorsque $T \rightarrow \infty$. Nous allons donner sous certaines conditions la loi asymptotique, sous $Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$, du processus $Z_T^{\hat{\theta}_T}(x) = \sqrt{T}(F_T(x) - F^{\hat{\theta}_T}(x))$, $\forall x \in [0, 1]$. Nous verrons que $Z_T^{\hat{\theta}_T}$ converge en loi dans $D[0, 1]$, sous $Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$, vers un processus gaussien continu, dont la loi est différente de celle de Z^{θ} obtenue au paragraphe précédent. Ceci nous permettra d'obtenir un test de Kolmogorov, généralisé au cas où les paramètres sont estimés lors de la même observation.

Nous conservons les notations du paragraphe précédent, et nous faisons les mêmes hypothèses que pour la proposition 2.6.

On se donne l'estimateur $\hat{\theta}_t$ sous la forme :

$$\hat{\theta}_t = \Phi(t, (\pi_s, s \leq t))$$

où Φ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R}^k .

Nous supposons que $\forall \theta \in \Theta$, $\hat{\theta}_t - \theta$ vérifie asymptotiquement, sous $Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$, la relation suivante :

$$\hat{\theta}_t - \theta = \left(\int_0^t \psi(\pi_s) ds \right)^{-1} \int_0^t \phi(\pi_s) d\tilde{W}_s + \varepsilon(t)$$

où $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Wiener standard réel sous $Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$, $\phi = (\phi_i)_{i=1, \dots, k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ est telle que, sous $Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$, l'on a :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad \mathbf{E}_{\nu, \theta, \sigma} \left[\int_0^T (\phi_i(\pi_s))^2 ds \right] < \infty, \quad \forall T > 0,$$

$$Q_{\theta}^{\nu, \sigma} - \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T (\phi_i(\pi_s), \phi_j(\pi_s)) ds = c_{ij}^{\theta} < \infty, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

$\psi = (\psi_{ij}), i, j = 1, \dots, k : \mathbb{R} \rightarrow M_{k \times k}$, où $M_{k \times k}$ est l'espace des matrices carré de \mathbb{R}^k , vérifie :

$$\forall i, j = 1, \dots, k, \quad \int_0^T (\psi_{ij}(\pi_s))^2 ds < \infty, \quad Q_{\theta}^{\nu, \sigma} - p.s., \quad \forall T > 0,$$

$$\forall i, j = 1, \dots, k, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_{ij}(\pi_s) ds = d_{ij}^{\theta} < \infty, \quad Q_{\theta}^{\nu, \sigma} - p.s.$$

et, $\varepsilon(t) = (\varepsilon_i(t)), i = 1, \dots, k$ vérifie :

$$\forall i = 1, \dots, k, \int_0^T \varepsilon_i^2(s) ds < \infty, Q_{\theta}^{\nu, \sigma} - p.s, \forall T > 0,$$

$$\forall i = 1, \dots, k, Q_{\theta}^{\nu, \sigma} - \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{T} \varepsilon_i(T) = 0.$$

Les hypothèses précédentes, qui peuvent paraître relativement fortes, sont vérifiées par les estimateurs classiques, notamment les estimateurs du maximum de vraisemblance, les estimateurs des moindres carrés et ceux issus de la méthode des moments, dans de nombreux cas (voir A.Le Breton, M.Musiela [15], E.Fournié, D.Talay [10], Yu.A.Kutoyants [13]).

Dans la suite, on pose :

$$C_{\theta} = (c_{ij}^{\theta}), \quad i, j = 1, \dots, k,$$

$$D_{\theta} = (d_{ij}^{\theta}), \quad i, j = 1, \dots, k,$$

et l'on suppose D_{θ} inversible, et l'on note :

$$D_{\theta}^{-1} = B_{\theta} = (b_{ij}^{\theta}).$$

Le théorème suivant, dû à Yu.A.Kutoyants [14], assure alors la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}_T$, i.e. sous $Q_{\theta}^{\nu, \sigma}$:

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta) \implies \eta^{\theta}.$$

où η^{θ} est une variable aléatoire de \mathbb{R}^k de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma^{\theta})$, où $\Gamma^{\theta} = (\gamma_{ij}^{\theta})$.

Dans toute la suite, on gardera les mêmes notations.

Théorème 3.9 Soit $W = (W_t, \mathcal{F}_t), t > 0$ un processus de Wiener standard m -dimensionnel, $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)$ et $F = (F_t), t > 0, F_t = (f_t^{ij})_{n, m}$, un processus matriciel (\mathcal{F}_t) -adapté vérifiant :

$$\forall i, j = 1, \dots, n, \mathbf{E} \left[\int_0^T (f_s^{ij})^2 ds \right] < \infty, \forall T > 0,$$

et, si l'on pose $f_t^k = (f_t^{k1}, \dots, f_t^{km})$, $k = 1, \dots, n$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T (f_s^i, f_s^j) ds \stackrel{P}{=} c_{ij} < \infty, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

alors :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1/2} \int_0^T F_s dW_s \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, C = (c_{ij})).$$

On a la relation $\Gamma^{\theta} = B_{\theta} C_{\theta} {}^t B_{\theta}$. D'autre part, une conséquence immédiate de l'ergodicité est :

$$C_{\theta} = (\mu^{\theta}(\phi_i \phi_j)), \quad i, j = 1, \dots, k.$$

3.1 Le théorème principal

Nous sommes maintenant en mesure de donner la loi asymptotique du processus $Z_T^{\hat{\theta}_T}$ sous $Q_\theta^{\nu,\sigma}$. Plus précisément, nous allons démontrer le

Théorème 3.10 *Sous les hypothèses précédentes, et si l'on suppose de plus que $F^\theta(x)$ est deux fois continûment différentiable en θ , uniformément en x , et qu'elle a toutes ses dérivées partielles secondes bornées sur tout compact de Θ , continues en x , alors $\forall \theta \in \Theta$, on a sous $Q_\theta^{\nu,\sigma}$:*

$$Z_T^{\hat{\theta}_T} \Rightarrow \hat{Z}^\theta$$

dans $D[0,1]$, où \hat{Z}^θ est un processus gaussien à trajectoires $Q_\theta^{\nu,\sigma}$ -p.s. continues de moyenne nulle et de covariance

$$\begin{aligned} \hat{c}^\theta(x, y) &= c^\theta(x, y) - \sum_{p,q=1}^k \left(\frac{\partial F^\theta}{\partial \theta_p}(x) b_{pq}^\theta \mu^\theta(\sigma \dot{G}_y^\theta \phi_q) + \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta_p}(y) b_{pq}^\theta \mu^\theta(\sigma \dot{G}_x^\theta \phi_q) \right) \\ &+ \sum_{p,q=1}^k \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta_p}(x) \gamma_{pq}^\theta \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta_q}(y) \end{aligned}$$

On a alors, $\forall \theta \in \Theta$:

$$\lim_{u,T \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \log(Q_\theta^{\nu,\sigma}(\sup_{x \in [0,1]} |Z_T^{\hat{\theta}_T}(x)| > u)) = -\frac{1}{2\hat{\kappa}_\theta^2}$$

où $\hat{\kappa}_\theta^2 = \sup_{x \in [0,1]} \hat{c}^\theta(x, x)$.

En vue d'établir la validité de cet énoncé, nous allons donner la loi asymptotique, sous $Q_\theta^{\nu,\sigma}$, de $\left(\frac{Z_T^\theta}{\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)} \right) \in D[0,1] \times \mathbb{R}^k$.

Proposition 3.11 *Avec les hypothèses précédentes, on a, $\forall \theta \in \Theta$, sous $Q_\theta^{\nu,\sigma}$:*

$$\left(\frac{Z_T^\theta}{\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} Z^\theta \\ \eta^\theta \end{pmatrix}$$

dans $D[0,1] \times \mathbb{R}^k$, et $Q_\theta^{\nu,\sigma}((Z^\theta, \eta^\theta) \in C[0,1] \times \mathbb{R}^k) = 1$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.12 $\forall x \in [0,1]$:

$$\left(\frac{Z_T^\theta(x)}{\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} Z^\theta(x) \\ \eta^\theta \end{pmatrix}$$

où $(Z^\theta(x), \eta^\theta)$ est un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^{k+1} .

Preuve Soit $x \in [0, 1]$, et considérons G_x^θ solution dans $L^2(\mu)$ de

$$\mathcal{L}^\theta G_x^\theta = -\tilde{f}_x^\theta$$

Nous avons, sous $Q_\theta^{\nu, \sigma}$, la représentation suivante pour $Z_T^\theta(x)$ (cf. théorème 2.2) :

$$\begin{aligned} Z_T^\theta(x) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \tilde{f}_x^\theta(\pi) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} (G_x^\theta(\pi_0) - G_x^\theta(\pi_T)) + \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T (\sigma \dot{G}_x^\theta)(\pi_s) d\tilde{W}_s. \end{aligned}$$

où $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Wiener standard sous $Q_\theta^{\nu, \sigma}$.

En tenant compte de la représentation asymptotique, $\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)$, on a, pour un certain T_0 , $\forall T > T_0$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Z_T^\theta(x) \\ \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (T^{-1} \int_0^T \psi(\pi_s) ds)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{-1/2} \int_0^T (\sigma \dot{G}_x^\theta)(\pi_s) d\tilde{W}_s \\ T^{-1/2} \int_0^T \phi(\pi_s) d\tilde{W}_s \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} T^{-1/2} (G_x^\theta(\pi_0) - G_x^\theta(\pi_T)) \\ T^{1/2} \varepsilon(T) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les propriétés des fonctions ϕ et $(\sigma \dot{G}_x^\theta)$, et le théorème 3.9 entraînent la convergence en loi de l'intégrale stochastique normalisée du second membre de 3 vers une gaussienne, sous $Q_\theta^{\nu, \sigma}$.

Tenant compte du fait que $\frac{1}{\sqrt{T}} (G(\pi_t^\theta) - G(\pi_0^\theta)) \rightarrow 0$ en probabilité sous $Q_\theta^{\nu, \sigma}$ (voir le théorème 2.2), des propriétés de la fonction ψ et de celles du processus (ε_t) énoncées plus haut, on en déduit que sous la loi $Q_\theta^{\nu, \sigma}$:

$$\begin{pmatrix} Z_T^\theta(x) \\ \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Z^\theta(x) \\ \eta^\theta \end{pmatrix}$$

dans \mathbb{R}^{k+1} , et $(Z^\theta(x), \eta^\theta)$ est un vecteur gaussien (cf. une argumentation similaire dans E.Fournié-D.Talay [10]). \square

Preuve (de la proposition 3.11) On généralise facilement le résultat du lemme précédent au vecteur de \mathbb{R}^{k+n} :

$$(Z_T^\theta(x_1), \dots, Z_T^\theta(x_n), \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta)), \quad \forall n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n.$$

On a donc montré la convergence des loi fini-dimensionnelles du processus $\begin{pmatrix} Z_T^\theta \\ \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta) \end{pmatrix}$ vers celles du processus $\begin{pmatrix} Z^\theta \\ \eta^\theta \end{pmatrix}$. Pour obtenir la convergence en loi, il reste à voir que

la famille des lois de $\left(\begin{array}{c} Z_T^\theta \\ \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta) \end{array} \right)$ est tendue dans $D[0,1] \times \mathbb{R}^k$. Ceci est immédiat puisque la famille des lois de Z_T^θ est tendue. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.10.

Preuve (du théorème 3.10) Nous allons dans un premier temps montrer que les lois finidimensionnelles de $Z_T^{\hat{\theta}_T}$ convergent, sous $Q_{\theta}^{\nu,\sigma}$, vers celles d'un certain processus gaussien centré \hat{Z}^θ , et nous allons identifier ces lois limites.

Remarquons que :

$$Z_T^{\hat{\theta}_T}(x) = Z_T^\theta(x) - \sqrt{T}(F^{\hat{\theta}_T}(x) - F^\theta(x))$$

Considérons la fonction :

$$\begin{aligned} h_{\theta,x} : \mathbb{R}^{k+1} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (X, Y) &\longrightarrow h_{\theta,x}(X, Y) = X - (F^{\theta+Y}(x) - F^\theta(x)) \end{aligned}$$

On a :

$$Z_T^{\hat{\theta}_T}(x) = \sqrt{T} h_{\theta,x}(F_T(x) - F^\theta(x), \hat{\theta}_T - \theta)$$

Comme que $F^\theta(x)$ est deux fois différentiable en θ et qu'elle a toutes ses dérivées partielles secondes en θ bornées sur un voisinage V_θ de θ , que d'autre part, sous $Q_{\theta}^{\nu,\sigma}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \quad \frac{1}{\sqrt{T}} Z_T^\theta(x) &= F_T(x) - F^\theta(x) \xrightarrow{\text{p.s.}} 0, \\ \hat{\theta}_T - \theta &\xrightarrow{\text{P}} 0, \end{aligned}$$

$$\sqrt{T} \begin{pmatrix} F_T(x) - F^\theta(x) \\ \hat{\theta}_T - \theta \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} Z^\theta(x) \\ \eta^\theta \end{pmatrix}$$

on obtient, en appliquant le th. 3.3.11 dans [6] :

$$\sqrt{T} h_{\theta,x}(F_T(x) - F^\theta(x), \hat{\theta}_T - \theta) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma_{\theta,x}).$$

L'expression de la matrice de covariance $\Sigma_{\theta,x}$ est donnée ci-dessous dans un cas plus général.

On obtient facilement une version multi-dimensionnelle du résultat précédent. $\forall n, \forall x^n = (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$, considérons la fonction :

$$\begin{aligned} h_{\theta,x^n} : \mathbb{R}^{n+k} &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (X_1, \dots, X_n, Y) &\longrightarrow h_{\theta,x^n}(X_1, \dots, X_n, Y) = \{X_i - (F^{\theta+Y}(x_i) - F^\theta(x_i))\}_{i=1,\dots,n} \end{aligned}$$

On a :

$$\sqrt{T} h_{\theta,x}(F_T(x_1) - F^\theta(x_1), \dots, F_T(x_n) - F^\theta(x_n), \hat{\theta}_T - \theta) \implies \mathcal{N}(0, \Sigma_{\theta,x^n}^n)$$

Un calcul direct donne l'expression de Σ_{θ,x^n} :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\theta,x^n} &= (c^\theta(x_i, y_j))_{i,j=1,\dots,n} - {}^t N_\theta(x^n) {}^t B_\theta {}^t \dot{F}^\theta(x^n) - \dot{F}^\theta(x^n) B_\theta N_\theta(x^n) + \\ &+ \dot{F}^\theta(x^n) \Gamma^\theta {}^t \dot{F}^\theta(x^n) \end{aligned}$$

où l'on a posé,

$$\begin{aligned} \dot{F}^\theta(x^n) &= \left(\frac{\partial F^\theta}{\partial \theta_j}(x_i) \right)_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,k} \\ \text{et} \\ N_\theta(x^n) &= (n_{ij}^\theta = \mu^\theta(\sigma \dot{G}_{x_j}^\theta, \phi_i))_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,k} \end{aligned}$$

Nous avons montré que les lois fini-dimensionnelles limite, lorsque $T \rightarrow \infty$, de $Z_T^{\hat{\theta}_T}$ sont celles d'un certain processus \hat{Z}^θ , où \hat{Z}^θ est un processus gaussien centré, de covariance $\hat{c}^\theta(x, y)$.

Nous allons maintenant prouver que, sous $Q_{\theta}^{\nu,\sigma}$, $Z_T^{\hat{\theta}_T} \implies \hat{Z}^\theta$. Nous allons pour cela utiliser un théorème bien connu dû à H. Rubin (cf. P. Billingsley [3]).

Pour cela, on définit la famille de fonctions $(g_t^\theta)_{t>0}$ et la fonction g^θ par :

$$\begin{aligned} g_t^\theta &: D[0,1] \times \mathbb{R}^k \longrightarrow D[0,1] \\ g_t^\theta(X(\cdot), Y) &= X(\cdot) - \sqrt{t} \left(F^{\theta+Y/\sqrt{t}}(\cdot) - F^\theta(\cdot) \right) \\ g^\theta &: D[0,1] \times \mathbb{R}^k \longrightarrow D[0,1] \\ g^\theta(X(\cdot), Y) &= X(\cdot) - \nabla F^\theta(\cdot).Y \end{aligned}$$

où ∇ est l'opérateur gradient. On a $Z_T^{\hat{\theta}_T} = g_T^\theta(Z_T^\theta, \sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta))$.

On obtient par application de la formule de Taylor dans \mathbb{R}^k au point $(\theta + h, x)$ relativement au point (θ, x) , où $h \in V_0$, un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^k :

$$F^{\theta+h}(x) = F^\theta(x) + \nabla F^\theta(x).h + {}^t h D_{\theta^*}^{(2)}(x) h$$

où $D_{\theta^*}^{(2)}(x)$ est la matrice des dérivées partielles secondes au point θ^* , où θ^* appartient au segment de droite $[\theta, \theta + h]$. Comme $F^\theta(x)$ a toutes ses dérivées partielles secondes bornées sur tout compact de Θ , uniformément en x , $g_t^\theta \longrightarrow g^\theta$, $t \longrightarrow \infty$ uniformément sur tout compact de $D[0,1] \times \mathbb{R}^k$.

g^θ étant continue pour la topologie produit sur $D[0,1] \times \mathbb{R}^k$, le théorème 5.5 dans Billingsley [3] montre qu'on a, sous $Q_{\theta}^{\nu,\sigma}$, $Z_T^{\hat{\theta}_T} \implies \hat{Z}^\theta = g^\theta(Z^\theta, \eta^\theta)$. Comme le processus Z^θ est $Q_{\theta}^{\nu,\sigma}$ -p.s. à trajectoires continues, et $F^\theta \in C^1[0,1]$, le processus \hat{Z}^θ est $Q_{\theta}^{\nu,\sigma}$ -p.s. à trajectoires continues. Ceci achève la démonstration du théorème 3.10. \square

3.2 Un test de modèle

Nous sommes maintenant en mesure de mettre en place un test plus puissant que celui du paragraphe précédent.

Soit \mathcal{E}_1 l'espace des diffusions réelles ergodiques, de loi stationnaire μ , de loi initiale ν , de coefficient de dérive $b(x)$, et de coefficient de diffusion $\sigma(x)$, où $b(x)$ est une fonction borélienne, bornée sur tout compact de \mathbb{R} , et $\sigma^2(x)$ est une fonction continue, strictement positive. On note $Q_b^{\nu, \sigma}$, la loi induite par une telle diffusion sur $(C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}), \mathcal{B})$. On a donc :

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}), \mathcal{B}, \left\{ Q_b^{\nu, \sigma}, (b, \nu, \sigma^2) \in B_K^b(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \times \mathbf{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}_*^+) \right\} \right\}$$

où $B_K^b(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur tout compact de \mathbb{R} .

On note \mathcal{E}_1^0 , le sous-espace de \mathcal{E}_1 des diffusions vérifiant :

$$\begin{aligned} Q_b^{\nu, \sigma} - \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, (\pi_s, s \leq t)) &= \theta^*, \theta^* \in \Theta, \\ \forall \theta \in \Theta, \exists B \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu_\theta(B) &\neq \mu(B). \end{aligned}$$

où $\Phi(t, (\pi_s, s \leq t))$ est l'estimateur de θ dans le modèle statistique \mathcal{E}_0 , qui vérifie les propriétés énoncées au début du paragraphe 3, et $\{\mu_\theta, \theta \in \Theta\}$ désigne la famille des lois stationnaires des processus de l'espace \mathcal{E}_0 .

La proposition suivante permet de tester, pour une observation donnée $X = (X_t)_{t \geq 0}$ dont la loi Q induite sur $(C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}), \mathcal{B})$ appartient à \mathcal{E}_1^0 , l'hypothèse :

$$\begin{aligned} H_0 &: Q \in \mathcal{E}_0 \\ \text{contre } H_1 &: Q \in \mathcal{E}_1^0 \end{aligned}$$

Proposition 3.13 *Supposons vérifiées les conditions du théorème 3.10, et considérons la diffusion $X \in \mathcal{E}_1^0$. Notons Q la loi induite par X sur $(C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}), \mathcal{B})$. On a :*

$$Q - \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, 1]} |Z_T^{\hat{\theta}_T}(x)| = \infty.$$

Preuve On a $\forall x \in [0, 1], F_T(x) \rightarrow G(x)$, Q -p.s, où $G(x)$ est la fonction de répartition de la mesure invariante de la diffusion ergodique $X = (X_t)_{t \geq 0}$. D'autre part, $\forall x \in [0, 1], F_T^{\hat{\theta}_T}(x) \xrightarrow{P} F^{\theta^*}(x)$, sous Q , où $\theta^* \in \Theta$. Par définition de \mathcal{E}_1^0 , $\forall \theta \in \Theta, \exists x \in [0, 1], G(x) \neq F^\theta(x)$. On conclut facilement que $\sup_{x \in [0, 1]} \sqrt{T} |F_T(x) - F_T^{\hat{\theta}_T}(x)| \xrightarrow{P} \infty$, sous Q . \square

Exemple 3.14 On considère à nouveau la famille $\mathcal{F}_\theta = \{(X_t^\theta)_{t \geq 0}, \theta \in \Theta =]0, +\infty[\}$ de processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètre θ , noté O.U(θ), vérifiant les E.D.S.

$$dX_t^\theta = -\theta X_t^\theta dt + dW_t$$

Soit $\hat{\theta}_T$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ , on a (voir, par exemple, Y.A.Kutoyants [13]) :

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_T - \theta) = (T^{-1} \int_0^T |X_t^\theta|^2 dt)^{-1} T^{-1/2} \int_0^T X_t^\theta dW_t$$

Soit $(X_t, 0 \leq t \leq T)$ une observation. On veut tester l'hypothèse :

$$H_0 : (X_t) \in \{(X_t^\theta), \theta \in \Theta =]0, +\infty[\}.$$

On choisit $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], f(x) = \exp(-x^2)$.

On vérifie facilement que les hypothèses du corollaire 3.10 sont vérifiées. Par conséquent, le processus empirique $Z_T^{\hat{\theta}_T}(x) = \sqrt{T}(F_T(x) - F^{\hat{\theta}_T}(x)), \forall x \in [0, 1]$, dans le cas où l'observation provient de la famille de processus \mathcal{F}_θ , converge vers un processus gaussien continu \hat{Z}^θ de covariance :

$$\begin{aligned} \hat{c}^\theta(x, y) &= c^\theta(x, y) - \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta}(x) b^\theta \mu^\theta(\sigma \dot{G}_y^\theta \phi) - \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta}(y) b^\theta \mu^\theta(\sigma \dot{G}_x^\theta \phi) \\ &+ \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta}(x) \gamma^\theta \frac{\partial F^\theta}{\partial \theta}(y) \end{aligned}$$

avec

$$c^\theta(x, y) = 4 \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \int \exp(\theta u^2) \tilde{g}_x^\theta(u) \tilde{g}_y^\theta(u) du, \quad x, y \in [0, 1]$$

où l'on a posé $\tilde{g}_x^\theta(u) = \int_{-\infty}^u \tilde{f}_x^\theta(v) \exp(-\theta v^2) dv$. On a $\phi(x) = x$ et (voir, par exemple, Y.A.Kutoyants [13]), $b^\theta = \Gamma^\theta = 2\theta$.

Si l'observation provient d'un processus (Y_t) ergodique, de loi stationnaire μ , n'appartenant pas à la famille \mathcal{F}_θ , tel que l'estimateur $\hat{\theta}_T$ appliqué à (Y_t) converge presque sûrement (ce sera le cas si $\int x^2 d\mu(x) < \infty$), le supremum sur $[0, 1]$ du processus empirique $(|Z_T^{\hat{\theta}_T}(x)|, x \in [0, 1])$, considéré comme processus en T , tend p.s. vers l'infini, lorsque $T \rightarrow \infty$.

Les essais numériques ci-dessous montrent le comportement du test. Nous avons mis en oeuvre le test avec une simulation d'un processus O.U, et nous avons observé un bon comportement du test. Nous l'avons ensuite mis en oeuvre avec des observations provenant de modèles de diffusion plus ou moins "distants" du modèle O.U, dont les lois invariantes admettent des moment d'ordre deux (condition nécessaire pour que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_T$ du paramètre θ appliqué à ces observations converge p.s.). Les simulations ont été effectuées avec les paramètres suivants :

Schéma de discrétisation : Milshtein (ordre 2)

Zones de rejet : $R1 = [x \geq 3\kappa_{\hat{\theta}_T}], Q_{\theta}^{\nu, \sigma}(\sup_{x \in [0, 1]} |\hat{Z}^\theta(x)| \in R1) \simeq 0.01, R2 = [x \geq 2.448\kappa_{\hat{\theta}_T}], Q_{\theta}^{\nu, \sigma}(\sup_{x \in [0, 1]} |\hat{Z}^\theta(x)| \in R2) \simeq 0.05$

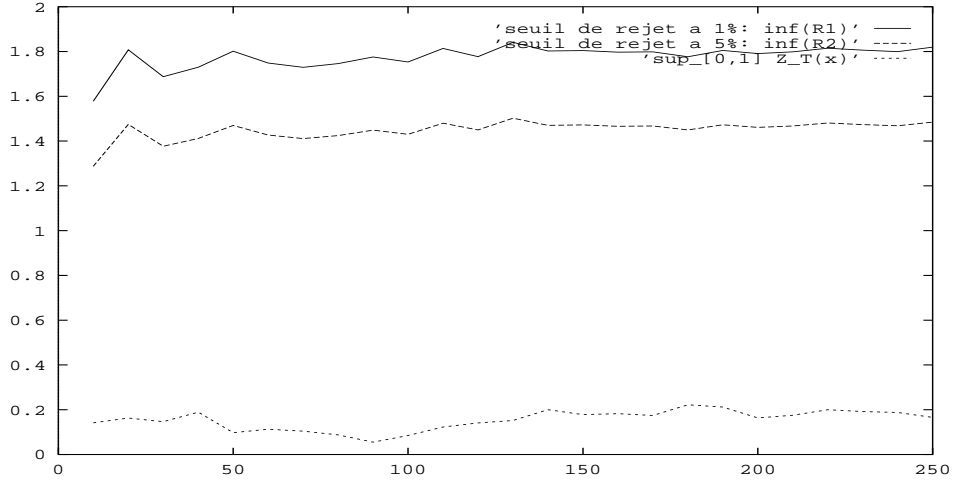


Figure 7: *Observation : $O.U(1)$*

Pas de discrétisation : $3.83.10^{-3}$

Temps de simulation : 1200

Observation : figure 7 : Ornstein-Uhlenbeck de paramètre $\theta = 1.0$; figure 8 : diffusion de dérive $c(x) = -x^3$, et de coefficient de diffusion $\gamma(x) = 1$; figure 9 : diffusion de dérive $c(x) = -x^9$, et de coefficient de diffusion $\gamma(x) = 1$

On détermine numériquement pour les $T = 5n, n = 1, 2, \dots$, l'estimateur $\hat{\theta}_T$ de θ , ainsi que le maximum $\kappa_{\hat{\theta}_T}$ de la variance du processus limite, sous l'hypothèse H_0 , au point $\hat{\theta}_T$, i.e. le maximum de la variance de $\hat{Z}^{\hat{\theta}_T}$. Nous avons donc des seuils de rejet variables qui convergent lorsque $T \rightarrow \infty$.

On voit (figure 8) que le test met assez longtemps pour rejeter l'hypothèse H_0 lorsque l'observation provient de $dX_t = -X_t^3 dt + dW_t$. On s'attendait à un tel comportement du test car le processus X_t passe beaucoup de temps dans un voisinage de 0 (où sa loi invariante est concentrée), et autour de 0, la fonction x^3 se laisse relativement bien approcher par une fonction linéaire de type $\theta x, \theta > 0$. La figure 9 montre que le test se comporte mieux, c'est-à-dire rejette plus vite l'hypothèse, lorsque l'observation provient du modèle $dX_t = -X_t^9 dt + dW_t$, la fonction x^9 étant plus difficilement approchable par θx . Nous allons détailler plus précisément ce dernier point et donner, sous certaines hypothèses, une vitesse asymptotique de rejet du modèle.

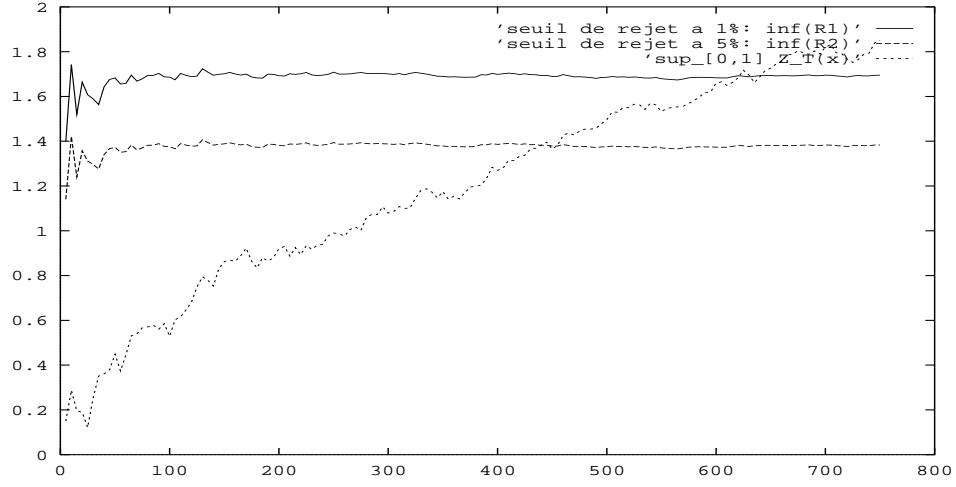


Figure 8: Observation : $dX_t = -X_t^3 dt + dW_t$

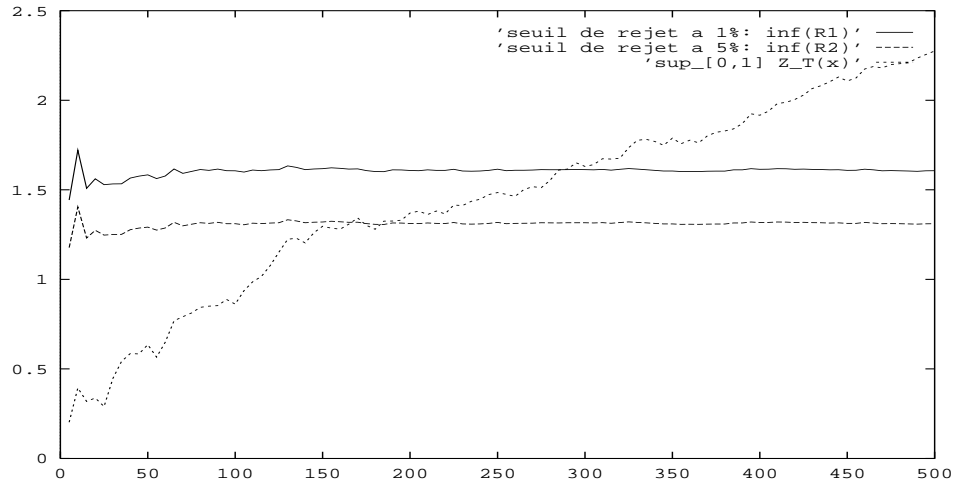


Figure 9: Observation : $dX_t = -X_t^9 dt + dW_t$

3.3 Vitesse asymptotique de rejet du modèle

Soit $\mathcal{F}_\theta = \{(Y_t^\theta), \theta \in \Theta\}$ une famille de diffusions satisfaisant les hypothèses du théorème 3.10, vérifiant les E.D.S :

$$dY_t^\theta = f(Y_t^\theta, \theta) dt + \gamma(Y_t^\theta) dW_t, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

\mathcal{F}_θ définit implicitement l'espace statistique \mathcal{E}_0 . Soit $(X_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{E}_1^0$, de loi invariante μ , vérifiant l'E.D.S :

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

Notons $Q_b^{\nu, \sigma}$ la loi induite sur $(C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}), \mathcal{B})$ par le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ lorsque la loi initiale est ν .

Supposons vérifiées les conditions suivantes, où X est une variable aléatoire de loi μ :

(C1) $|f(x, \theta_1) - f(x, \theta_2)| \leq J(x)\psi(\theta_1 - \theta_2)$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, où $\mathbf{E}[J(X)/\gamma(X)]^2 < \infty$ et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \psi(\alpha) = 0$.

(C2) $\mathbf{E}[\sigma(X)/\gamma(X)]^2 < \infty$ et $|f(x, \theta)| \leq K(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta$, où $\mathbf{E}[K(X)/\gamma(X)]^2 < \infty$.

(C3) $f(x, \theta)$ est continue en (x, θ) et différentiable en θ . Il existe $\alpha > 0$ tel que $|f'(x, \theta_1) - f'(x, \theta_2)| \leq c(x)|\theta_1 - \theta_2|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$, où $\mathbf{E}[\sigma(X)c(X)/\gamma^2(X)]^2 < \infty$.

(C4) $\mathbf{E} \left[\frac{b(X) - f(X, \theta)}{\gamma(X)} \right]^2 < \infty$, $\forall \theta \in \Theta$, et admet un unique minimum au point θ^* .

Ian W. McKeague [17] a montré :

Théorème 3.15 *Soit $\hat{\theta}_t$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ dans le modèle (3). Sous les hypothèses (C1)-(C4), $\hat{\theta}_t \rightarrow \theta^*$, $Q_b^{\nu, \sigma}$ -p.s.*

On peut affaiblir les conditions (C1)-(C4).

On montre le résultat suivant :

Théorème 3.16 *Supposons satisfaites les hypothèses du théorème 3.10 et les conditions (C1)-(C4). On a alors :*

$$\sup_{x \in [0,1]} T^{-1/2} Z_T^{\hat{\theta}_T}(x) \longrightarrow \sup_{x \in [0,1]} |G(x) - F^{\theta^*}(x)|, \quad Q_b^{\nu, \sigma} - p.s.$$

où $G(x) = \int \chi_{[0,x]} \circ f d\mu$.

La preuve est une application directe des résultats précédents.

Exemple 3.17 On reprend l'exemple précédent. On suppose que l'observation provient de la famille \mathcal{F}_θ des processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Si la diffusion observée vérifie :

$$dX_t = -X_t^3 dt + dW_t, \quad t \geq 0,$$

on montre facilement que les hypothèses du théorème 3.16 sont vérifiées et l'on calcule numériquement $\theta^* = \frac{\mathbf{E}_\mu[X^4]}{\mathbf{E}_\mu[X^2]} = 1.046$, et $\sup_{x \in [0,1]} |G(x) - F^{\theta^*}(x)| = 6.95 \cdot 10^{-2}$, où μ est la mesure de probabilité invariante, solution de l'équation de Fokker-Planck stationnaire associée au processus de diffusion $(X_t)_{t \geq 0}$.

De même, si l'observation satisfait :

$$dX_t = -X_t^9 dt + dW_t, \quad t \geq 0$$

on a $\theta^* = \frac{\mathbf{E}_\mu[X^{10}]}{\mathbf{E}_\mu[X^2]} = 1.152$, et $\sup_{x \in [0,1]} |G(x) - F^{\theta^*}(x)| = 0.105$.

Les figures 10 et 11 montrent que le processus $\sup_{x \in [0,1]} T^{-1/2} Z_T^{\hat{\theta}_T}(x)$ converge vers les valeurs théoriques que nous venons de calculer, lorsque $T \rightarrow \infty$.

Les essais numériques ont été effectués avec les mêmes paramètres que dans l'exemple précédent.

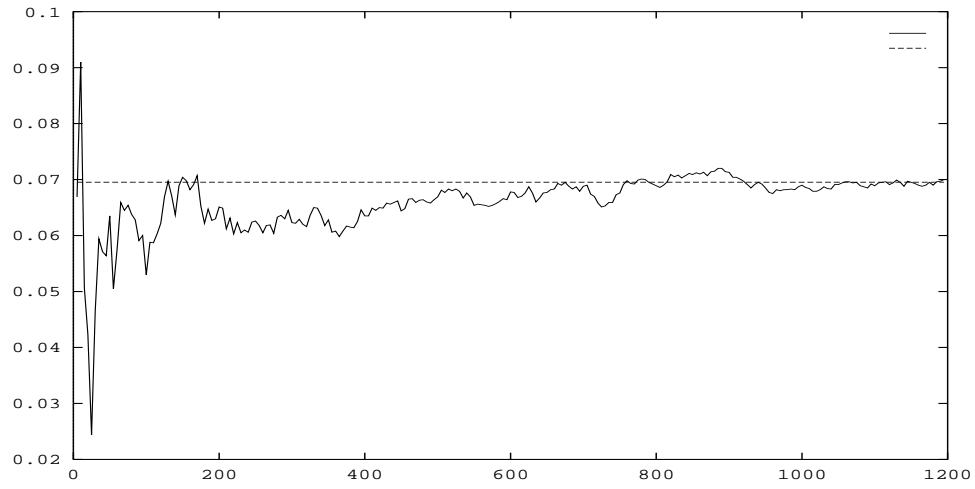


Figure 10: $\sup_{x \in [0,1]} T^{-1/2} Z_T^{\hat{\theta}_T}(x)$ pour une observation de $dX_t = -X_t^3 dt + dW_t$

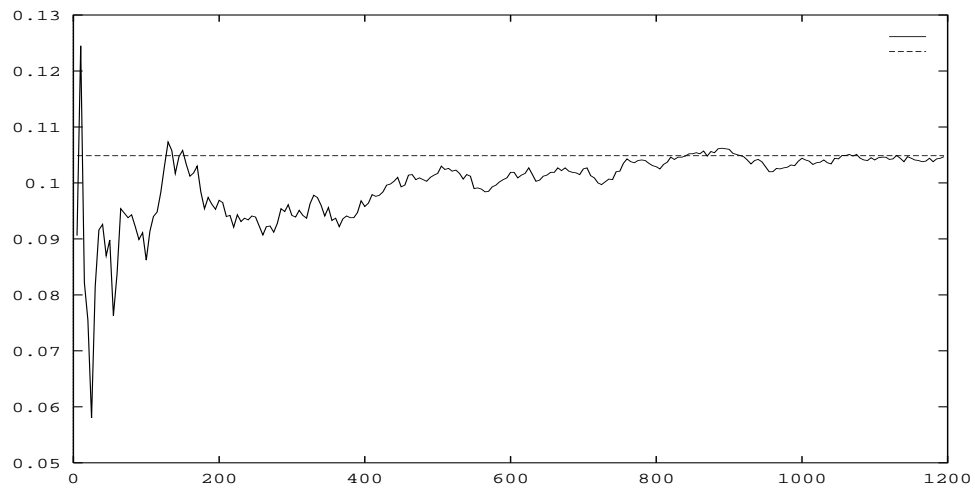


Figure 11: $\sup_{x \in [0,1]} T^{-1/2} Z_T^{\hat{\theta}_T}(x)$ pour une observation de $dX_t = -X_t^9 dt + dW_t$

4 Conclusion

Nous avons présenté un test d'adéquation de modèle pour des processus de diffusion ergodiques, fondé sur une statistique de grandes déviations pour le suprémum du processus empirique. Nous avons testé numériquement ses performances pour certains processus, et donné, sous certaines hypothèses, une vitesse asymptotique de rejet du modèle.

Nous avons vu, et l'on pouvait s'en douter, que le rejet est lent lorsque le modèle et l'observation sont proches. Un autre choix de statistique de grandes déviations, par exemple le nombre de passage du processus empirique à un certain niveau, donnerait peut-être de meilleurs résultats.

Les modèles de taux d'intérêt que nous voulions tester se comportent à peu près comme des processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Il est donc impossible d'accepter ou de rejeter définitivement ces modèles car les changements de l'économie entraînent des ruptures de modèle qui peuvent être assez nettes, et nous imposent des tailles d'échantillons de taux beaucoup trop faibles. Cette étude montre donc clairement qu'il est impératif de tester la robustesse des formules d'évaluation de prix d'outils financiers aux variations du modèle. Nous présentons de manière détaillée, dans la thèse en cours d'Eric Fournié [9], des applications de ce test d'adéquation aux principaux modèles de taux d'intérêt, c'est-à-dire le modèle de Vasicek et le modèle de Cox-Ingersoll-Ross.

Ce test d'adéquation de modèle de diffusion ergodique peut s'avérer néanmoins intéressant lorsque le modèle reste stable durant de grands laps de temps.

References

- [1] S.M.BERMAN : The maximum of a Gaussian process with nonconstant variance , Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 21-4, 1985, p 383-394.
- [2] R.N.BHATTACHARYA & S.RAMASUBRAMANIAN : Recurrence and Ergodicity of Diffusions , Journal of Multivariate Analysis, vol. 12, No 1, March 1982.
- [3] P.BILLINGSLEY : *"Convergence of probability measures"*, John Wiley and sons, 1968.
- [4] B.M.BROWN & J.I.HEWITT : Asymptotic likelihood theory for diffusion process , J.Appl.Prob 12, 228-238, 1975.
- [5] J.C.COX, J.E.INGERSOLL & S.A.ROSS : A theory of the term structure of the interest rates , Econometrica, vol. 53, 1985.
- [6] D.DACUNHA-CASTELLE & M.DUFLO : *"Probabilité et statistiques, tome 2"*, Masson, 1983.

- [7] M.D.DONSKER & R.S.VARADHAN : Asymptotic Evaluation of Certain Markov Process Expectations for Large Time, I, II, III, Comm.Pure.Appl.Math. vol. XXVIII, p 1-47, p 279-301, 1975, vol. XXIX, p 389-461, 1976.
- [8] D.FLORENS-ZMIROU : Théorème de limite centrale pour une diffusion et sa discrétisée , C.R.Acad.Sc.Paris, t.299, Série I, No 19, 1984.
- [9] E.FOURNIE : Statistiques des diffusions : applications aux mathématiques financières , Thèse de Math. Appli. Inria-Université de Nice , en cours.
- [10] E.FOURNIE & D.TALAY : Application de la statistique des diffusions à un modèle de taux d'intérêt , to appear in "Finance".
- [11] R.Z.HAS'MINSKII : "*Stochastic stability of differential equation*", Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [12] I.KARATZAS & S.E.SHREVE : "*Brownian motion and stochastic calculus*", Springer-Verlag, 1988.
- [13] Yu.A.KUTOYANTS : "*Parameter estimation for stochastic processes*", Heldermann Verlag Berlin, 1984.
- [14] Yu.A.KUTOYANTS : "*On a hypotheses testing problem and asymptotic normality of stochastic integral*", Theory-Probability Appl. 20, 376-384, 1975.
- [15] A.LE BRETON & M.MUSIELA : A study of a one-dimensionnal bilinear differential model for stochastic processes , Prob. and Math. Stat., Vol. I, Fasc. 1 p 91-107, 1984.
- [16] M.B.MARCUS & L.A.SHEPP : Sample behavior of Gaussian processes , Sixth Berkeley Symposium on Math. Stat. and Probability , Vol.II , 1972 , pp. 423-439.
- [17] Ian W.McKEAGUE : Estimation for Diffusion Processes under Misspecified Models , J.Appl.Prob.21, p 511-520 (1984).
- [18] D.TALAY : Simulation and Numerical Analysis of Stochastic Differential Systems , (Rapport de Recherche INRIA 1313 (1990)), "*Effective Stochastic Analysis*", P.Kree & W.Wedig (Eds.), à paraître.